Πέμπτο διαγώνισμα στις επιφάνειες

Διάρκεια 2 Ώρες

Θέμα 1

Δίνεται η κανονική επιφάνεια $S : z = xy^2$

(i) Να υπολογίσετε τις θεμελιώδεις μορφές πρώτης και δεύτερης τάξης της επιφάνειας.

(ii) Να υπολογίσετε την καμπυλότητα Gauss K της επιφάνειας και να βρείτε εκείνα τα σημεία στα οποία η K μηδενίζει.

(iii) Εξετάστε αν η επιφάνεια ειναι ευθειογενής και αναπτυκτή.

(iv) Μπορεί η S να είναι ισομετρική με τη σφαίρα;

(v) Βρείτε τις κύριες καμπυλότητες της S στα σημεία που η καμπυλότητα Gauss της S κάνει μηδέν. Τι σημεία έχουμε εκεί;

(vi) Έστω $p(x_0, y_0, z_0) \in S$. Να αποδείξετε ότι η επιφανειακή καμπύλη $\gamma(t) = X(t + x_0, y_0)$, $t \in \mathbb{R}$ είναι ασυμπτωτική γραμμή της S στο p.

Θέμα 2

Δίνεται η επιφάνεια $S : x = 9y^2 - 4z^2$

(i) Να βρεθουν οι ασυμπτωτικές γραμμές της S.

(ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει δύκτιο ασυμπτωτικών γραμμών.

(iii) Να εξετάσετε αν η S ευθειογενής και αναπτυκτή.

(iv) Δίνεται μία νέα επιφάνεια $\hat{S}$ με καμπυλότητα Gauss ισή με το έτος γέννησης σας. Μπορεί οι S και $\hat{S}$ να είναι ισομετρικές επιφάνειες; Εξηγήστε λεπτομερώς.

Θέμα 3

Δίνεται $c(s)$ μια επιφανιακή καμπύλη μιας κανονικής επιφάνειας S, και $s \in I$ μήκος τόξου.

(i) Να αποδείξετε ότι

$$k_n(\dot{c}(s)) = \langle (N \circ c)(s), \ddot{c}(s) \rangle, \ \forall \ s \in I.$$

(ii) Αν c ευθεία, να αποδείξετε ότι η c είναι ασυμπτωτική γραμμή της S.

(iii) Αν από ένα σημείο p της S διέρχονται τρεις διακεκριμένες ευθείες οι οποίες περιέχονται στην S, να αποδείξετε ότι το σημείο p είναι ισόπεδο.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ